

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
LỚP 9 – THCS (NĂM 2015 – 2016)
MÔN TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút

Ngày thi: 22/3/2015

Bài 1: (2 điểm)

Cho hai số thực phân biệt a, b thỏa điều kiện: $ab = a - b$. Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$

Bài 2: (3 điểm)

Giải phương trình: $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+2} = \frac{4x-3}{5}$

Bài 3: (3 điểm)

Cho hai số x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình: $x^2 + ax + b = 0$, đồng thời $x_1^2 - \frac{1}{2}$ và $x_2^2 - \frac{1}{2}$ cũng là các nghiệm của phương trình $x^2 + \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)x + b^2 - \frac{1}{2} = 0$. Tìm a và b .

Bài 4: (4 điểm)

- Cho hai số thực x, y ($x + y \neq 0$). Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + \left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2 \geq 2$
- Trong một hình vuông có cạnh bằng 1, ta lấy 5 điểm tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 5: (5 điểm)

Cho ΔABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (K) qua A tiếp xúc với cạnh BC tại D, cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q và cắt (O) tại E khác A. Tia ED cắt (O) tại F khác E. Chứng minh rằng:

- $\angle CAD = \angle FAB$
- $\frac{PQ}{BC} = \frac{DP \cdot DQ}{DB \cdot DC}$

Bài 6: (3 điểm)

Chiều ngày 13/3, Công ty khai thác thủy lợi hồ Dầu Tiếng – Phước Hòa cho biết đã kết thúc đợt xả nước đầy mạn xuống sông Sài Gòn. Đây là lần xả nước thứ 5 từ đầu năm, giúp người dân Sài Gòn đảm bảo nước sinh hoạt, phục vụ nông nghiệp.

Đợt xả nước công suất $30m^3/s$ kéo dài trong 3 ngày, mạn đã được đẩy ra các cửa sông. Theo đơn vị này, sau đợt xả, mực nước trong hồ cao khoảng 20m, trữ lượng nước gần 850 triệu m^3 .

Tuy giúp các nhà máy nước hạ lưu hoạt động được nhưng nhiều chuyên gia bày tỏ lo lắng bởi trữ lượng tại các hồ đầu nguồn thấp trong khi dự báo đợt hạn mạn có thể kéo dài đến tháng 5. Hiện các hồ phải cần kéo trong việc xả nước đầy mạn để phục vụ cho nông nghiệp và hoạt động sản xuất nước.

Về nguyên nhân xâm nhập mạn, ông Phạm Thế Vinh – Viện Khoa học Thủy lợi miền Nam – cho rằng, hạn mạn diễn ra mạnh vì El Nino kéo dài khiến khu vực Nam bộ rất ít mưa. Ngoài ra, việc triều cường kéo dài đến tháng 2; 3 khiến nước mạn đi sâu vào các cửa sông. Ông Bùi Thanh Giang – Phó tổng giám đốc Công ty cấp nước Sài Gòn (Sawaco) – cho biết, năm nay trữ lượng nước về các hồ đầu nguồn giảm mạnh. Trong đó, lượng nước tích trữ của hệ thống hồ Dầu Tiếng – Phước Hòa trên thượng nguồn sông Sài Gòn

còn hiện tại chỉ đạt **70%** . Lưu lượng của hồ Trị An trên sông Đồng Nai chỉ đạt khoảng 80% so với trung bình hàng năm. Về giải pháp lâu dài, Sawaco kiến nghị UBND TP.HCM cho phép xây dựng hồ trữ nước thô cho nguồn nước sông Sài Gòn với vốn thực hiện từ ngân sách. Ngoài ra, đơn vị cũng đề xuất nâng cao công nghệ xử lý nước nhưng việc này đòi hỏi chi phí đầu tư, vận hành cao. (Nguồn vnexpress.net)

- a) Hãy cho biết lượng nước mà hồ Dầu Tiếng đã xả trong 3 ngày qua?
- b) Nếu tiếp tục xả 20% lượng nước hiện có để ngăn mặn (với tốc độ xả như trên) thì công việc này sẽ mất bao nhiêu ngày.
- c) Giả sử việc xả nước chống mặn diễn ra liên tục từ hôm nay (22/3) đến hết ngày 15/5, tính lượng nước mà hồ đã xả trong khoảng thời gian này.

  **HẾT**  

Thăng Tiến Thăng Long

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
LỚP 9 – THCS (NĂM 2015 – 2016)
MÔN TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày thi: 22/3/2015

Bài 1: (2 điểm)

Cho hai số thực phân biệt a, b thỏa điều kiện: $ab = a - b$. Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$

$$\text{Ta có: } A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2 + b^2 - (ab)^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{ab} = 2$$

Bài 2: (3 điểm)

Giải phương trình: $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+2} = \frac{4x-3}{5}$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 5x-1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{5x-1} \\ b = \sqrt{x+2} \end{cases} \quad (a, b \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 5x-1 \\ b^2 = x+2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 4x-3$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } a - b = \frac{a^2 - b^2}{5} \Leftrightarrow (a-b)(a+b-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+b-5=0 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } a - b = 0 \Rightarrow \sqrt{5x-1} - \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5x-1} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ 5x-1 = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \text{ (nhận)}$$

$$\text{TH2: } a + b - 5 = 0 \Rightarrow \sqrt{5x-1} + \sqrt{x+2} - 5 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5x-1} + \sqrt{x+2} = 5$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+2})^2 = 25 \Leftrightarrow 5x-1 + x+2 + 2\sqrt{(5x-1)(x+2)} = 25 \Leftrightarrow \sqrt{(5x-1)(x+2)} = 12-3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12-3x \geq 0 \\ (5x-1)(x+2) = (12-3x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ 4x^2 - 81x + 146 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ (x-2)(4x-73) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x = 2 \\ x = \frac{73}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (nhận)}$$

Vậy $S = \left\{ \frac{3}{4}; 2 \right\}$

Bài 3: (3 điểm)

Cho hai số x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình: $x^2 + ax + b = 0$, đồng thời $x_1^2 - \frac{1}{2}$ và $x_2^2 - \frac{1}{2}$ cũng là các nghiệm của phương trình $x^2 + \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)x + b^2 - \frac{1}{2} = 0$. Tìm a và b.

Cách 1:

Vì x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình: $x^2 + ax + b = 0$ nên theo định lí Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = b \end{cases}$$

Đặt $X_1 = x_1^2 - \frac{1}{2}; X_2 = x_2^2 - \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = x_1^2 - \frac{1}{2} + x_2^2 - \frac{1}{2} \\ X_1 X_2 = \left(x_1^2 - \frac{1}{2}\right)\left(x_2^2 - \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 1 \\ X_1 X_2 = (x_1 x_2)^2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 1 \\ X_1 X_2 = (x_1 x_2)^2 - \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 = (-a)^2 - 2b - 1 \\ X_1 X_2 = b^2 - \frac{1}{2}[(-a)^2 - 2b] + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 = a^2 - 2b - 1 \\ X_1 X_2 = b^2 - \frac{1}{2}a^2 + b + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vì X_1, X_2 là các nghiệm của phương trình: $x^2 + \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)x + b^2 - \frac{1}{2} = 0$

nên theo định lí Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} X_1 + X_2 = \frac{1}{2} - a^2 \\ X_1 X_2 = b^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

mà
$$\begin{cases} X_1 + X_2 = a^2 - 2b - 1 \\ X_1 X_2 = b^2 - \frac{1}{2}a^2 + b + \frac{1}{4} \end{cases}$$

nên
$$\begin{cases} a^2 - 2b - 1 = \frac{1}{2} - a^2 \\ b^2 - \frac{1}{2}a^2 + b + \frac{1}{4} = b^2 - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 4b = 3 \\ -2a^2 + 4b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 0 \\ -2a^2 + 4b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{-3}{4} \end{cases}$$

Cách 2:

Ta có :

$$\begin{cases} x^2 + ax + b = 0(1) \\ x^2 + \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)x + b^2 - \frac{1}{2} = 0(2) \end{cases} \text{ có nghiệm nên có điều kiện : } \begin{cases} a^2 - 4b \geq 0 \\ \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(b^2 - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \end{cases}$$

• Do x_1, x_2 là 2 nghiệm của pt (1), theo định lý Vi – ét, ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 \cdot x_2 = b \end{cases}$$

- Do $\left(x_1^2 - \frac{1}{2}\right); \left(x_2^2 - \frac{1}{2}\right)$ là nghiệm của pt (2), theo định lý Vi - ét , ta có :

$$\begin{cases} x_1^2 - \frac{1}{2} + x_2^2 - \frac{1}{2} = -a^2 + \frac{1}{2} \\ \left(x_1^2 - \frac{1}{2}\right)\left(x_2^2 - \frac{1}{2}\right) = b^2 - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = -a^2 + \frac{1}{2} \\ (x_1 x_2)^2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{4} = b^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = -a^2 + \frac{3}{2} \\ (x_1 x_2)^2 - \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] = b^2 - \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2b = a^2 + \frac{3}{2} \\ b^2 - \frac{1}{2}(a^2 - 2b) = b^2 - \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{4} \\ a^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{4} \text{ (nhận)} \\ a = 0 \end{cases}$$

Vậy $(a; b) = \left(0; -\frac{3}{4}\right)$ thì thỏa đề.

Bài 4: (4 điểm)

- a) Cho hai số thực x, y ($x + y \neq 0$). Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + \left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2 \geq 2$

Cách 1:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + \left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2 \geq 2 &\Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + \left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2 \geq 2 \\ &\Leftrightarrow (x+y)^2 - 2(1+xy) + \left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x+y - \frac{1+xy}{x+y}\right)^2 \geq 0 \text{ (bất đẳng thức đúng)} \end{aligned}$$

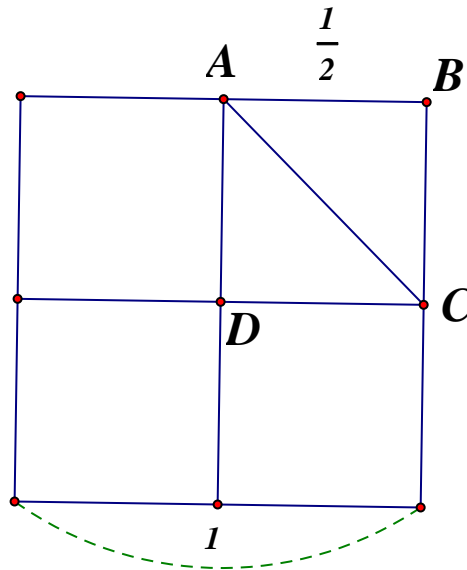
Cách 2:

Áp dụng BĐT Cô - si cho hai số không âm, ta được:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 + \left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2 &\geq 2\sqrt{(1+xy)^2} = 2|1+xy| \geq 2+2xy \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + \left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2 \geq 2+2xy \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2 \geq 2 \end{aligned}$$

Vậy BĐT đã được chứng minh.

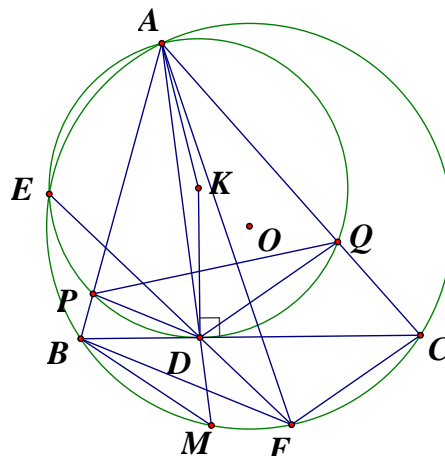
- b) Trong một hình vuông có cạnh bằng 1, ta lấy 5 điểm tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$



- Ta chia hình vuông có cạnh là 1 thành 4 hình vuông nhỏ có cạnh là $\frac{1}{2}$ như hình vẽ.
 - Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 - Lấy 5 điểm tùy ý trong hình vuông có cạnh là 1 (số con thỏ) cho vào 4 hình vuông nhỏ có cạnh là $\frac{1}{2}$ như hình vẽ (số chuông), thì theo nguyên lý Dirichle có ít nhất một hình vuông nhỏ có cạnh là $\frac{1}{2}$ chứa hai điểm mà khoảng cách 2 điểm đó không lớn hơn đường chéo của hình vuông nhỏ bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Vậy luôn tồn tại 2 điểm có khoảng cách không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 5: (5 điểm)

Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (K) qua A tiếp xúc với cạnh BC tại D, cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q và cắt (O) tại E khác A. Tia ED cắt (O) tại F khác E. Chứng minh rằng:



a) CAD = FAB

Ta có:

$$\begin{cases} \text{EAC} + \text{EFC} = 180^\circ \text{ (Tứ giác EACF nội tiếp)} \\ \text{EAC} + \text{EDQ} = 180^\circ \text{ (Tứ giác EAQD nội tiếp)} \end{cases} \Rightarrow \text{EFC} = \text{EDQ} . \text{ Mà hai góc này nằm ở vị trí đồng vị.}$$

Nên $DQ \parallel FC \Rightarrow \text{BCF} = \text{QDC}$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} \text{QDC} = \text{CAD} \text{ (góc tạo bởi tt và dc chắn DQ của (K))} \\ \text{FAB} = \text{BCF} \text{ (hai gnt chắn BF của (O))} \end{cases} \Rightarrow \text{CAD} = \text{FAB}$$

b) $\frac{PQ}{BC} = \frac{DP.DQ}{DB.DC}$

Gọi M là giao điểm của AD và (O) (M khác A)

Ta có:

$$\text{CAD} = \text{FAB} \text{ (cma)} \Rightarrow \text{CAF} + \text{MAF} = \text{BAM} + \text{MAF} \Rightarrow \text{CAF} = \text{BAM} \Rightarrow \text{CF} = \text{BM} \Rightarrow \text{CF} = \text{BM}$$

Xét $\triangle PQD$ và $\triangle CBF$, ta có:

$$\begin{cases} \text{QDP} = \text{BFC} \text{ (cùng bù BAC)} \\ \text{QPD} = \text{BCF} (= \text{QDC}) \end{cases} \Rightarrow \triangle PQD \sim \triangle CBF \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{PD}{CF} \Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{DP.DQ}{CF.DQ} \text{ (1)}$$

Xét $\triangle DBM$ và $\triangle QDC$, ta có:

$$\begin{cases} \text{BMD} = \text{DCQ} \text{ (hai gnt chắn AB của (O))} \\ \text{DBM} = \text{QDC} (= \text{CAM}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle DBM \sim \triangle QDC \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{DB}{DQ} = \frac{BM}{CD} \Rightarrow \text{DB.DC} = \text{BMDQ} \Rightarrow \text{DB.DC} = \text{CF.DQ} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{PQ}{BC} = \frac{DP.DQ}{DB.DC}$

Bài 6: (3 điểm)

Chiều ngày 13/3, Công ty khai thác thủy lợi hồ Dầu Tiếng – Phước Hòa cho biết đã kết thúc đợt xả nước đầy mạn xuống sông Sài Gòn. Đây là lần xả nước thứ 5 từ đầu năm, giúp người dân Sài Gòn đảm bảo nước sinh hoạt, phục vụ nông nghiệp.

Đợt xả nước công suất $30\text{m}^3/\text{s}$ kéo dài trong 3 ngày, mạn đã được đẩy ra các cửa sông. Theo đơn vị này, sau đợt xả, mực nước trong hồ cao khoảng 20m, trữ lượng nước gần 850 triệu m^3 .

Tuy giúp các nhà máy nước hạ lưu hoạt động được nhưng nhiều chuyên gia bày tỏ lo lắng bởi trữ lượng tại các hồ đầu nguồn thấp trong khi dự báo đợt hạn mặn có thể kéo dài đến tháng 5. Hiện các hồ phải căn kéo trong việc xả nước đầy mạn để phục vụ cho nông nghiệp và hoạt động sản xuất nước.

Về nguyên nhân xâm nhập mặn, ông Phạm Thế Vinh – Viện Khoa học Thủy lợi miền Nam – cho rằng, hạn mặn diễn ra mạnh vì El Nino kéo dài khiến khu vực Nam bộ rất ít mưa. Ngoài ra, việc triều cường kéo dài đến tháng 2,3 khiến nước mặn đi sâu vào các cửa sông. Ông Bùi Thanh Giang – Phó tổng giám đốc Công ty cấp nước Sài Gòn (Sawaco) – cho biết, năm nay trữ lượng nước về các hồ đầu nguồn giảm mạnh. Trong đó, lượng nước tích trữ của hệ thống hồ Dầu Tiếng – Phước Hòa trên thượng nguồn sông Sài Gòn còn hiện tại chỉ đạt 70%. Lưu lượng của hồ Trị An trên sông Đồng Nai chỉ đạt khoảng 80% so với trung bình hàng năm. Về giải pháp lâu dài, Sawaco kiến nghị UBND

TP.HCM cho phép xây dựng hồ trữ nước thô cho nguồn nước sông Sài Gòn với vốn thực hiện từ ngân sách. Ngoài ra, đơn vị cũng đề xuất nâng cao công nghệ xử lý nước nhưng việc này đòi hỏi chi phí đầu tư, vận hành cao. (Nguồn vnexpress.net)

a) Hãy cho biết lượng nước mà hồ Dầu Tiếng đã xả trong 3 ngày qua?

Thời gian xả nước: $3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 259200(\text{s})$

Lượng nước mà hồ Dầu Tiếng đã xả trong 3 ngày:

$$30 \cdot 259200 = 7.776.000(\text{m}^3)$$

b) Nếu tiếp tục xả 20% lượng nước hiện có để ngăn mặn (với tốc độ xả như trên) thì công việc này sẽ mất bao nhiêu ngày.

20% lượng nước hiện có là: $850.000.000 \cdot 20 : 100 = 170.000.000(\text{m}^3)$

Lượng nước xả ra trong 1 ngày là: $30 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 2.592.000(\text{m}^3)$

Thời gian hoàn thành công việc này là: $170.000.000 : 2.592.000 \approx 66(\text{ngày})$

Vậy thời gian xả là: 66 ngày.

c) Giả sử việc xả nước chống mặn diễn ra liên tục từ hôm nay (22/3) đến hết ngày 15/5, tính lượng nước mà hồ đã xả trong khoảng thời gian này.

Từ ngày 22/3 đến ngày 15/5 có: $10 + 30 + 15 = 55(\text{ngày})$

Lượng nước mà hồ đã xả ra trong 55 ngày là: $55 \cdot 2.592.000 = 142.560.000(\text{m}^3)$

❁ ❁ HẾT ❁ ❁